

1 Proposition de démonstration
2 de la conjecture de Goldbach

3 Rémy Aumeunier
4 Amateur

5 24 Juillet 2020

6 La conjecture de Goldbach est l'assertion mathématique non démontrée
7 qui s'énonce comme suit : Tout nombre entier pair supérieur à 2 peut
8 s'écrire comme la somme de deux nombres premiers. Formulé en 1742 par
9 Christian Goldbach, c'est l'un des plus vieux problèmes non résolus de la
10 théorie des nombres et des mathématiques. Elle partage avec l'hypothèse
11 de Riemann et la conjecture des nombres premiers jumeaux le numéro 8
12 des problèmes de Hilbert ¹.

13 **1 Préambule**

14 Cette présentation fait suite à de nombreux échanges sur différents forums
15 modérés, français ou anglais, ils ont permis de rendre cette proposition de démonstration
16 la moins ambiguë possible, tout en répondant aux éventuelles questions, je re-
17 mercie les relecteurs pour leurs contributions.

18 **2 Test de primalité**

19 Dans cette proposition de démonstration de la conjecture de Goldbach ² j'utilise
20 un test de primalité basé sur deux prérequis.

21 -Tout nombre composé à un facteur premier inférieur à sa racine carrée.
22 -À partir de $n = p \cdot q + r$ si $r = 0$ alors n est divisible par un nombre premier
23 $< \sqrt{n}$.
24

$$n \in N, E_q = \{q \text{ premier} \mid q \leq \sqrt{n}\}$$

25 si $\forall q \in E_q, (n) \bmod(q) \neq 0$ alors n est un nombre premier.

1. Lors du deuxième congrès international des mathématiciens, tenu à Paris en août 1900, David Hilbert, présenta une liste de problèmes qui tenaient jusqu'alors les mathématiciens en échec.

2. Le 7 juin 1742, le mathématicien prussien Christian Goldbach écrit au mathématicien suisse Leonhard Euler une lettre à la fin de laquelle il propose la conjecture suivante : Tout nombre strictement supérieur à 2 peut être écrit comme une somme de trois nombres premiers.

26 Pour appréhender la démonstration qui suit, il faut considérer que chaque calcul
 27 $(n) \bmod(q)$ constitue une mesure ,et si toutes les mesures sont différentes de zéro
 28 alors, n est un nombre premier, parce que tout nombre composé à un facteur
 29 premier inférieur à sa racine carrée.

$$R_n = \begin{pmatrix} (n) \bmod(2) = \{1\} \\ (n) \bmod(3) = \{1, 2\} \\ (n) \bmod(5) = \{1, 2, 3, 4\} \\ (n) \bmod(7) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ \dots \\ \dots \\ (n) \bmod(q_{max}) = \{1, \dots, (q_{max} - 1)\} \end{pmatrix}$$

30 Donc si un entier à toutes ces décomposition sous forme de modulo constituer
 31 de valeur différente de zéro alors, cet entier est un nombre premier, à condition
 32 de respecter le domaine de définition bien sûr $q_{max} \leq \sqrt{n}$.

33 3 Conjecture de Goldbach

34 Pour démontrer la conjecture de Goldbach, je fais l'hypothèse qu'il existe un
 35 entier pair $2n > 2$ qui n'est pas décomposable en somme de 2 nombres premiers.

$$n \in N$$

$$E_p = \{p \text{ premier} \mid p < 2n\}$$

$$E_q = \{q \text{ premier} \mid q \leq \sqrt{2n}\}$$

38 J'ai donc une liste ou un ensemble E_p avec tous les nombres premiers éligibles
 39 à la décomposition en somme de $2n$, et un deuxième ensemble E_q qui va être
 40 utilisé pour tester le résultat de la décomposition de $(2n - p)$. Puis comme :

$$(2n - p) \bmod(q) = (2n) \bmod(q) - (p) \bmod(q)$$

41 Si $2n$ n'est pas décomposable en somme de 2 nombres premiers alors :

$$\forall p \in E_p, \exists q \in E_q, 2n \equiv (p) \bmod(q)$$

43 Un exemple numérique avec $2n = 300$ et $p = 41, \in E_p$ qui ne décompose pas
 44 $2n$ en somme de 2 nombres premiers.

$$2n = 300, \sqrt{300} = 17.3, E_q = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}, E_p = \{2, 3, 5, 7, \dots, \mathbf{41}, \dots, 283, 293\}$$

$$300 - 41 = 7 \cdot 37 + \mathbf{0} \quad \text{donc} \quad (300) \bmod(7) - (41) \bmod(7) = \mathbf{0}$$

$$R_{2n=300} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (\dots) \bmod(7) = \mathbf{6} \\ 3 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} - 41 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ (\dots) \bmod(7) = \mathbf{6} \\ 8 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \mathbf{0} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = 7 \cdot 37 + \mathbf{0}$$

47 Ici, si je fais l'hypothèse que 300 n'est pas décomposable, cela implique que
 48 tous les nombres premiers inférieurs à 300 partagent au moins une valeur avec
 49 l'ensemble R_{2n} , mais cela n'est pas possible, parce que je peux créer, fabriquer
 50 ou construire un ensemble avec des valeurs différentes de 0 et de $(2n) \bmod(q)$
 51 et cet ensemble sera un nombre premier, et décomposera $2n$ parce que par
 52 construction, la valeur obtenue sera plus petite, et n'aura aucun zéro, dans sa
 53 représentation sous forme de modulo. Donc tout nombre pair est décomposable
 54 en somme de 2 nombres premiers, parce que je peux créer, fabriquer ou construire
 55 un tel ensemble.

$$\{(p) \bmod(q)\} \neq \{(2n) \bmod(q)\}$$

56 3.1 Remarque

57 Cette notion peut aussi être utilisée pour justifier la conjecture de Legendre ³
 58 ou la conjecture des nombres premiers jumeaux. Je peux créer, fabriquer ou
 59 construire un ensemble R_p avec des valeurs différentes de 0 tel que $(R_p - 2) \neq$
 60 $0, \exists$, et cela, quelle que soit la taille de l'ensemble R_p .

61 4 Démonstration analytique

62 À partir des restes ou de la décomposition de $(2n - p)$ en modulo.

$$\begin{pmatrix} (2n - p) \bmod(2) \\ (2n - p) \bmod(3) \\ (2n - p) \bmod(5) \\ \dots \\ (2n - p) \bmod(q_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2n) \bmod(2) - (p) \bmod(2) \\ (2n) \bmod(3) - (p) \bmod(3) \\ (2n) \bmod(5) - (p) \bmod(5) \\ \dots \\ (2n) \bmod(q_n) - (p) \bmod(q_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 - (p) \bmod(2) \\ r_2 - (p) \bmod(3) \\ r_3 - (p) \bmod(5) \\ \dots \\ r_n - (p) \bmod(q_n) \end{pmatrix}$$

63 Je fais l'hypothèse qu'il existe un entier pair $2n$ qui n'est pas décomposable en
 64 somme de 2 nombres premiers. Cette hypothèse implique que tous les nombres
 65 premiers $< 2n$ sont de la forme $n \cdot q + r_n$, mais cela n'est pas possible parce que
 66 le théorème de Lejeune-Dirichlet ⁴ démontre qu'il y a une infinité de nombres
 67 premiers de la forme $k \cdot p + q$, avec p et q premiers entre eux. Donc il existe un
 68 nombre premier tel que $p_n = k \cdot p + n$ avec $n \notin \{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n\}$ et ce nombre
 69 premier décomposera $2n$ parce qu'il n'y aura aucun zéro dans la représentation
 70 sous forme de modulo du résultat de $(2n - p_n)$.

3. La conjecture de Legendre et la conjecture des nombres premiers jumeaux font partie des quatre problèmes à propos des nombres premiers qu'Edmund Landau présenta lors du congrès international des mathématiciens de 1912 à Cambridge. En 2020, ils ne sont pas résolus.

4. Le théorème de la progression arithmétique est une généralisation du théorème d'Euclide sur les nombres premiers. Sa première démonstration est due au mathématicien allemand Gustav Lejeune Dirichlet en 1838, cela fait appel aux résultats de l'arithmétique modulaire

71 5 Mode opératoire, décomposition de $2n$

72 Après avoir appréhendé comment et pourquoi $2n$ peut être décomposable.
73 Je propose de créer, fabriquer ou construire un tel ensemble, parmi toutes les
74 solutions possibles, l'une des méthodes les moins polémiques, consiste à remar-
75 quer que dans l'ensemble fini dénombrable des modulus de $2n$, et cela $\forall 2n$, il
76 existe toujours un ou des nombres premiers $\in E_q$ qui seront absents de cette
77 ensemble, parce que je ne peux pas créer un ensemble avec, tous les nombres
78 premiers $< \sqrt{2n}$, et l'un de ces nombres premiers absents décomposera $2n$, parce
79 qu'il n'y aura aucun zéro de présent, dans la représentation sous forme de mo-
80 dulo de $(2n - p_{abs})$. Donc tout nombre pair est décomposable en somme de 2
81 nombres premiers.

82 6 Note de l'auteur

83 Frustrant, non ? Je peux toujours décomposer $2n$ en somme de 2 nombres
84 premiers, parce qu'il n'existe pas d'entier pair qui a une décomposition sous
85 forme de modulo où tous les nombres premiers $< \sqrt{2n}$ sont présents. Oui mais
86 non, il s'avère que je peux aussi construire toute une arithmétique à partir de
87 ces ensembles, chose qui reste à définir, sauf erreur de ma part bien sûr. Dans
88 tous les cas, merci pour votre attention.

89 Références

- 90 [1] Conjecture de Goldbach.
91 [2] Conjecture de Legendre.
92 [3] Conjecture des nombres premiers jumeaux, triplés, quadruplés .
93 [4] distribution asymptotique des nombres premiers
94 [5] Un concept très personnel (le dénominateur commun de forme)